



TITLE:

# Pomeau-Manneville型間欠性カオスのクロスオーバー(カオスとその周辺,研究会報告)

AUTHOR(S):

樹神, 弘也; 本田, 勝也; 佐藤, 信一

---

CITATION:

樹神, 弘也 ...[et al]. Pomeau-Manneville型間欠性カオスのクロスオーバー(カオスとその周辺,研究会報告). 物性研究 1990, 53(5): 668-670

ISSUE DATE:

1990-02-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/93947>

RIGHT:

## Pomeau-Manneville 型間欠性カオスのクロスオーバー

名大工 樹神弘也

本田勝也

静大教養 佐藤信一

力学系が外部パラメーターの変化にともなって周期運動からカオスに至る道筋の一つに intermittency route がある。Pomeau と Manneville によって発見された、このカオスの発生機構は、分岐の仕方によって大きく Type I, II, III に分類された(表1)。<sup>1)</sup>

タイプ	I	II	III
分岐	鞍部結節点分岐	逆ホップ分岐	逆倍周期分岐
分岐図			
臨界モードに対するマップ (basic model)	$X_{n+1} = \varepsilon + X_n + X_n^2$	$r_{n+1} = (1 + \varepsilon) r_n + r_n^3$ $\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega$	$X_{n+1} = -(1 + \varepsilon) X_n - X_n^3$

表1 3つのタイプの間欠性カオス

$q$  次のレニーエントロピー  $K_q$  や  $h(q)$  スペクトラムは力学系の動的な性質を明らかにするが、Pomeau-Manneville 型間欠性カオスの場合、分岐点近傍においてこれらの量に関連した様々なスケーリング則が成り立つことが期待される。本研究は、Type I ~ III の basic model に対して分岐近傍における  $K_q$ ,  $h(q)$  を解析的手段を用いて求め、その特徴を考察したものである。 $K_q$  や  $h(q)$  を議論するときの要は分配関数  $Z_n(q) = \sum_{i_0, \dots, i_n} P\{i_0, \dots, i_n\}^q$  である。但し、 $i_j$  は相空間を分割したときの1つの boxを表わし、 $P\{i_0, \dots, i_n\}$  は軌道  $x_0, \dots, x_n$  がそれぞれ box  $i_0, \dots, i_n$  に入る結合確率である。間欠性カオスに対しては、

$$f(q) \equiv (q-1)K_q = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln Z_n(q) \quad (\equiv -\bar{p}(q))$$

が代数方程式

$$\Phi(\bar{p}, q) \equiv \sum_j \exp \left\{ -\bar{p}(q)j - qU(j) \right\} = 1 \quad (1)$$

$$U(j) = \begin{cases} -\ln b & (j=1) \\ -\ln(aP(j)) & (j \geq 1) \end{cases} \quad (P(j): \text{長さ } j \text{ のラミナーを見出す確率})$$

(a: バーストの後にラミナーが起る確率, b: バーストの後にバーストが起る確率)

の解として与えられることが報告されている。<sup>2)</sup>

幸いにして、Type I ~ III に対する  $P(j)$  は近似的に初等関数で表わせることが分かっているのので：

$$\text{Type I : } P_{\varepsilon}(j) = \frac{\varepsilon}{2c} \operatorname{cosec}^2 \left\{ \sqrt{\varepsilon} \left( j + \frac{1}{c} \right) \right\} \quad , \quad 0 \leq j \leq j_{\max} \left( = \frac{\pi}{\sqrt{\varepsilon}} - \frac{2}{c} \right)$$

$$\text{Type II : } P_{\varepsilon}(j) = \frac{2\varepsilon^2 (c^2 + \varepsilon) \exp(2\varepsilon j)}{\left\{ (c^2 + \varepsilon) \exp(2\varepsilon j) - c^2 \right\}^2} \quad , \quad 0 \leq j \leq \infty$$

$$\text{Type III : } P_{\varepsilon}(j) = \frac{\varepsilon^{3/2} (c^2 + \varepsilon) \exp(2\varepsilon j)}{\left\{ (c^2 + \varepsilon) \exp(2\varepsilon j) - c^2 \right\}^{3/2}} \quad , \quad 0 \leq j \leq \infty$$

これらを用いて (1) 式より  $f(q)$  を評価できる。また、バーストの頻度の  $q$  次平均量

$$\Psi_q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i_0, \dots, i_n} m\{i_0, \dots, i_n\} P\{i_0, \dots, i_n\}^q / Z_n(q)$$

(  $m\{i_0, \dots, i_n\}$  は、 $x_0, \dots, x_n$  のうちのバーストの数 )

は (1) 式で決められる  $\bar{p}$  により

$$\Psi_q = \left. \frac{1}{\frac{\partial \Phi(\bar{p}, q)}{\partial \bar{p}}} \right|_{\bar{p} = \bar{p}}$$

と与えられるので、これも評価した。以下に結果を示す。

#### Type I

	$ q - 1  < 1$
$\bar{p}_q$	$-\sqrt{\varepsilon}(q-1)$
$K_q$	$\sqrt{\varepsilon}$
$\gamma_q$	$\sqrt{\varepsilon}$
$h(\gamma_q)$	$\sqrt{\varepsilon}$
$\Psi_q$	$\sqrt{\varepsilon}$

#### Type II

	$-\varepsilon \ln \varepsilon < 1 - q < 1$	$ q - 1  < -\varepsilon \ln \varepsilon$	$-\varepsilon \ln \varepsilon < q - 1 < 1$
$\bar{p}_q$	$(q-1)/\ln(1-q)$	$(q-1)/\ln \varepsilon$	$-\varepsilon - \varepsilon(q-1)$
$K_q$	$-1/\ln(1-q)$	$-1/\ln \varepsilon$	$\varepsilon/(q-1)$
$\gamma_q$	$-1/\{\ln(1-q)\}^2$	$-1/\ln \varepsilon$	$\varepsilon$
$h(\gamma_q)$	$-1/\{\ln(1-q)\}^2$	$-1/\ln \varepsilon$	$0$
$\Psi_q$	$-1/\ln(1-q)$	$-1/\ln \varepsilon$	$0$

#### Type III

	$\sqrt{\varepsilon} < 1 - q < 1$	$ q - 1  < \varepsilon$	$\sqrt{\varepsilon} < q - 1 < 1$
$\bar{p}_q$	$(q-1)^2$	$-\sqrt{\varepsilon}(q-1)$	$-\varepsilon - \varepsilon(q-1)$
$K_q$	$1 - q$	$\sqrt{\varepsilon}$	$\varepsilon/(q-1)$
$\gamma_q$	$1 - q$	$\sqrt{\varepsilon}$	$\varepsilon$
$h(\gamma_q)$	$1 - q$	$\sqrt{\varepsilon}$	$0$
$\Psi_q$	$1 - q$	$\sqrt{\varepsilon}$	$0$

この結果から、Type II に対しては次の様な概念図を描くことができる。

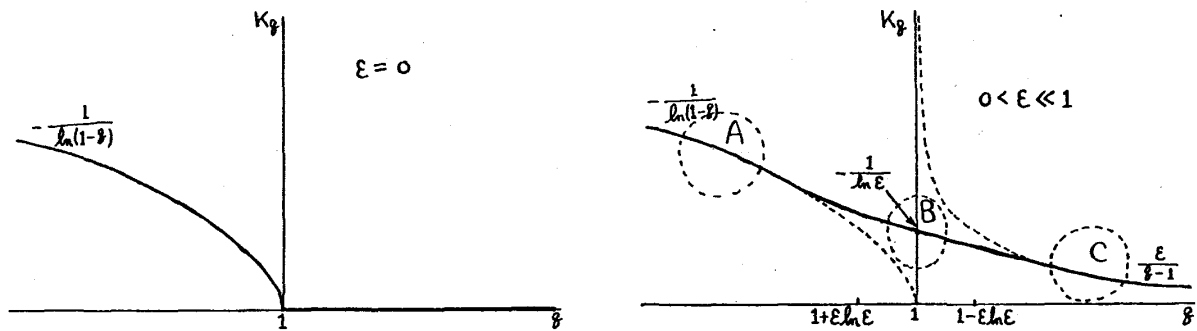


図 1 Type II に対する  $K_q$  プロットの概念図

A, B, C の領域は、 $\varepsilon$  の変化も考えると、曲線  $\varepsilon = -|q-1|/\ln|q-1|$  によって隔てられるが、この曲線上ではとなりあう領域がクロスオーバーしている。(図 2)

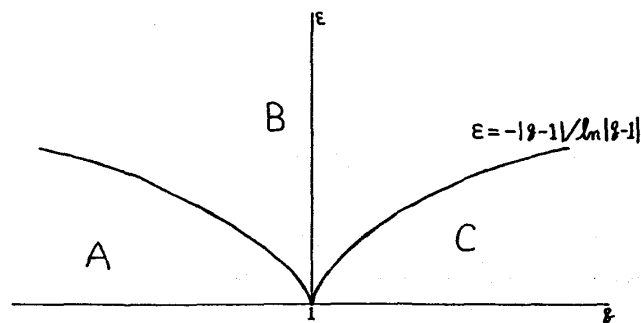


図 2 クロスオーバーライン (for Type II)

Type III の場合は、Type II と同様なので省略する。

Type I では、 $K_q$  の振舞いは Type II, III とは異なり、A, B, C の様な領域が存在しない。従って当然クロスオーバーラインもない。これは、Type I は  $q=1$  で  $q$  相転移を起さないことを意味するが、分岐点上 ( $\varepsilon=0$ ) においてもカオス的な振舞いを示す不変測度は存在するので (図 3)、 $q=1$  よりも小さな  $q$  で一次の  $q$  相転移を起こすと考えられる。

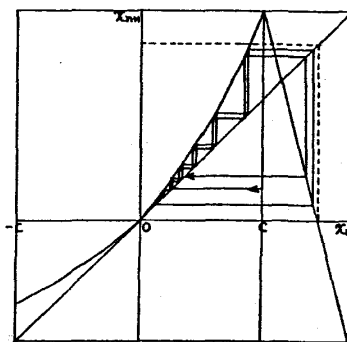


図 3 カントール集合上を動くカオス的な軌道

#### 文献

- 1) H. G. Schuster: "Deterministic Chaos", VCH, (1988)
- 2) S. Sato and K. Honda: to be published in Phys. Rev. A.  
K. Honda and S. Sato: Prog. Theor. Phys. 82, 682 (1989).